Induksi Matematika

Induksi Matematika adalah cara dalam membuktikan bahwa sebuah pernyataan tertentu berlaku untuk setiap bilangan asli. Pembuktian dengan cara ini terdiri dari dua langkah, yaitu:

1. Menunjukkan bahwa pernyataan itu berlaku untuk bilangan 1.
2. Menunjukkan bahwa jika pernyataan itu berlaku untuk bilangan n, maka pernyataan itu juga berlaku untuk bilangan $n + 1$.

Contoh 1

Misalkan akan dibuktikan

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Untuk membuktikan bahwa pernyataan itu berlaku untuk setiap bilangan asli, langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Menunjukkan bahwa pernyataan tersebut benar untuk $n = 1$. Jelas sekali bahwa jumlah 1 bilangan asli pertama adalah $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Jadi pernyataan tersebut adalah benar untuk $n = 1$.
2. Menunjukkan bahwa jika pernyataan tersebut benar untuk $n = k$, maka pernyataan tersebut juga benar untuk $n = k+1$. Hal ini bisa dilakukan dengan cara:
   - Mengasumsikan bahwa pernyataan tersebut benar untuk $n = k$, yaitu

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

- Menambahkan $k + 1$ pada kedua ruas, yaitu

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1).$$

- Dengan menggunakan manipulasi aljabar, diperoleh

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

- Dengan demikian

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

- Jadi pernyataan tersebut benar untuk $n = k + 1$.

3. Dengan induksi matematika dapat disimpulkan bahwa pernyataan tersebut berlaku untuk setiap bilangan asli n.

Secara formal Induksi Matematika ini bisa didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1

Misalkan untuk setiap bilangan asli n kita mempunyai pernyataan $P(n)$ yang bisa benar atau salah. Misalkan

1. $P(1)$ benar.
2. Jika $P(n)$ benar, maka $P(n + 1)$ benar.

Sehingga $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

Contoh 2

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa

$$n! \geq 2^{n-1}$$

untuk setiap n = 1, 2, ...

1. Akan ditunjukkan bahwa $n! \geq 2^{n-1}$ benar untuk $n = 1$. Jelas sekali bahwa $1! = 1 \geq 1 = 2^0 = 2^{1-1}$.

2. Asumsikan bahwa $n! \geq 2^{n-1}$ adalah benar untuk n = k.
   Akan ditunjukkan bahwa $n! \geq 2^{n-1}$ juga benar untuk n = k + 1, yaitu $(k+1)! \geq 2^{(k+1)-1}$.
   $$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1)k! \\ &\geq (k+1)2^{k-1} \\ &\geq 2.2^{k-1} \\ &= 2^{1+(k-1)} \\ &= 2^{(k+1)-1}\end{aligned}$$
   Terbukti bahwa $(k+1)! \geq 2^{(k+1)-1}$.

Jadi terbukti bahwa $n! \geq 2^{n-1}$ untuk setiap n = 1, 2, ...

Contoh 3

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa $5^n - 1$ dapat dibagi 4 untuk setiap n = 1, 2, ...

1. Akan ditunjukkan bahwa $5^n - 1$ habis dibagi 4 untuk n = 1.
   Jelas sekali bahwa $5^1 - 1 = 5 - 1 = 4$ habis dibagi 4.
2. Asumsikan bahwa $5^n - 1$ habis dibagi 4 untuk n = k, yaitu $5^k - 1$ habis dibagi 4. Akan ditunjukkan bahwa $5^n - 1$ juga habis dibagi 4 untuk n = k + 1, yaitu $5^{k+1} - 1$ habis dibagi 4.
   $$\begin{aligned}5^{k+1} - 1 &= 5.5^k - 1 \\ &= (1+4).5^k - 1 \\ &= 5^k + 4.5^k - 1 \\ &= 5^k - 1 + 4.5^k\end{aligned}$$
   Berdasarkan asumsi, $5^k - 1$ habis dibagi 4. Sedangkan 4.5^k juga habis dibagi 4. Dengan demikian $5^{k+1} - 1$ habis dibagi 4.
   Jadi terbukti bahwa $5^n - 1$dapat dibagi 4 untuk setiap n = 1, 2, ...